Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2018-2019 учебном году
10 класс
Вариант 1

Задача 1. (20 баллов). Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравновешивать весы грузом массой m = 0,13 г. Определить радиус капилляра r. Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) α = 0,073 Н/м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение:

Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Радиусы кривизны r этих поверхностей можно считать одинаковыми из-за тонкости стенки трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Тогда условие второго уравновешивания весов можно записать следующим образом

$$mg = 2 * 2\pi r\alpha.$$

Отсюда получаем ответ.

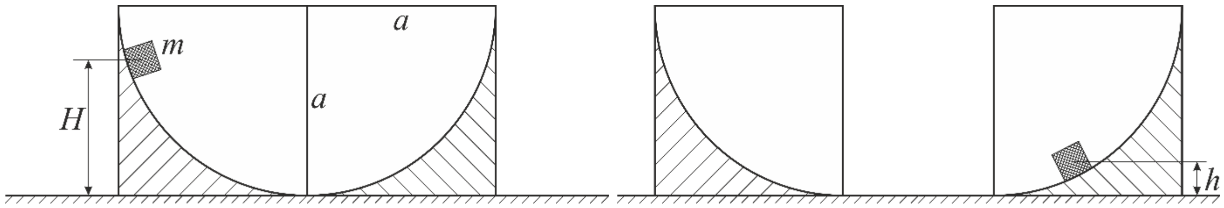
Итого: $r = \frac{mg}{4\pi\alpha} = 1.4$ мм.

Задача 2. (20 баллов). Частица в прямоугольном сосуде, имевшая скорость ***V***, столкнулась последовательно с тремя взаимно перпендикулярными стенками. Найти изменение вектора скорости частицы ***ΔV***. Все столкновения считать абсолютно упругими.

Решение:

При упругом столкновении отражение частицы от стенки является зеркальным, при этом сохраняется компонента импульса, параллельная стенке, а перпендикулярная меняет направление на противоположное. Пусть ось OX перпендикулярна первой стенке, с которой столкнулась частица, а вектор импульса частицы до столкновения имеет проекции на оси (p_x p_y p_z). Тогда, после столкновения с первой стенкой вектор импульса будет иметь проекции ($-p_x$, p_y, p_z). Выберем направление оси OY так, чтобы она была перпендикулярна второй стенке, тогда после столкновения со второй стенкой вектор импульса будет иметь проекции ($-p_x$,$-$ p_y, p_z), а после столкновения с третьей, которой перпендикулярна ось OZ, получим, соответственно проекции ($-p_x$,$-$ p_y, $-p_z$). Таким образом, после трех столкновений вектор импульса, а, следовательно, и скорости поменяют свое направление на противоположное. Вектор скорости будет равен **-V,** а изменение вектора скорости Δ**V=-V- V=** -2**V**

Задача 3. (20 баллов). В половине куба с длиной ребра, *a* из материала с плотностью *ρ* сделана полусферическая выемка диаметра, *a* (см. рис.). Оставшуюся часть распилили пополам по вертикали и положили на гладкую горизонтальную поверхность. Небольшое тело массы m поместили на внутреннюю стенку первой половины на высоту *H* и отпустили. На какую высоту *h* тело поднимется на второй половине? Трение не учитывать.



Решение:

Пусть масса левой и правой части равна M, скорость тела m в нижней точке траектории – U, скорость левой части в этот момент - V. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$mgH = \frac{mU^2}{2} + \frac{MV^2}{2} \quad (1)$$

$$MV = mU \quad (2)$$

Пусть скорость тела m в верхней точке траектории – U_1, скорость правой части в этот момент – тоже U_1. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{mU^2}{2} = \frac{(m+M)U_1^2}{2} + mgh \quad (3)$$

$$mU = (m+M)U_1 \quad (4)$$

Выразим V из уравнения (2) и подставим ее и в (1). Выразим U^2 из получившегося уравнения.

$$U^2 = \frac{2MgH}{m+M}$$

Выразим U_1 из уравнения (4).

$$U_1 = \frac{m}{m+M}U$$

Подставим U^2 и U_1 в уравнение (3) и получим соотношение (5).

$$h = \frac{M^2}{(m+M)^2}H \quad (5)$$

Найдем массу M. Эта масса равна массе целого куба, минус масса удаленного шара, деленной на четыре.

$$M = \left(\rho a^3 - \rho\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}\right)\Big/4 = \rho a^3\frac{6-\pi}{24}$$

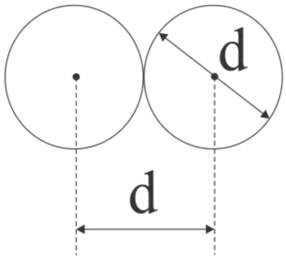
Подставив массу M в уравнение (5) получим ответ.

$$h = H\frac{\rho^2 a^6(6-\pi)^2}{\left(24m + \rho a^3(6-\pi)\right)^2}$$

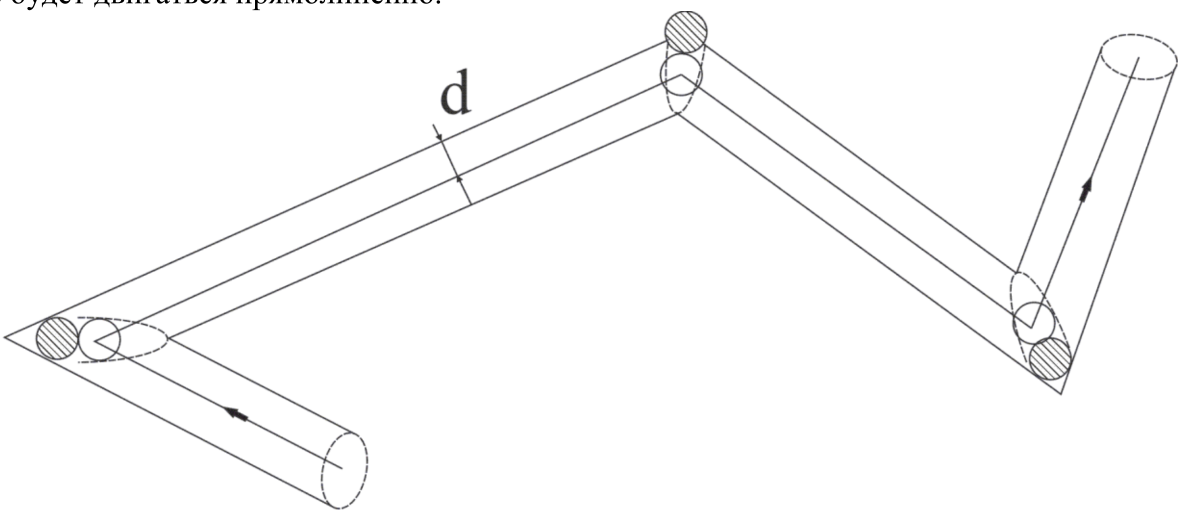
Задача 4. (20 баллов). В ряде случаев молекулу газа позволительно представлять в виде шарика диаметра d. Найти число столкновений υ в единицу времени выделенной молекулы газа с другими молекулами. Средняя скорость относительного движения молекул газа $\langle V_{\text{отн}}\rangle$, концентрация молекул n.

Решение:

Минимальное расстояние на которое сближаются при столкновении центры двух молекул равно диаметру молекулы d (это расстояние называется эффективным диаметром молекулы) смотри рисуно.

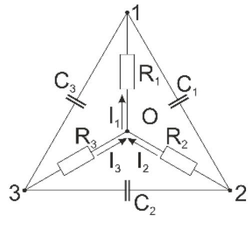


Для того, чтобы посчитать среднее число столкновений ν, предположим, что все молекулы , кроме данной застыли неподвижно на своих местах (тогда она движется со средней скоростью относительного движения <$V_{отн}$>). Проследим за движением выделенной нами молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул , она будет лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой смотри рисунок 2. Это соударение произойдёт в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии меньшем эффективного диаметра молекулы d. В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего некоторое время опять будет двигаться прямолинейно.



За секунду наша молекула проходит с среднем путь, равный средней скорости относительного движения <$V_{отн}$>. Число происходящих за это время соударений с неподвижными молекулами равно числу молекул, центры которых попадают внутри коленчатого цилиндра длины <$V_{отн}$> и радиуса d. Так как в газе расстояние между молекулами много больше их диаметра, мы можем считать объем цилиндра равным: $\pi d^2 \langle V_{отн} \rangle$. Умножив этот объем на число молекул в единице объема n, получим среднее число столкновений за секунду движущейся молекулы с неподвижной.

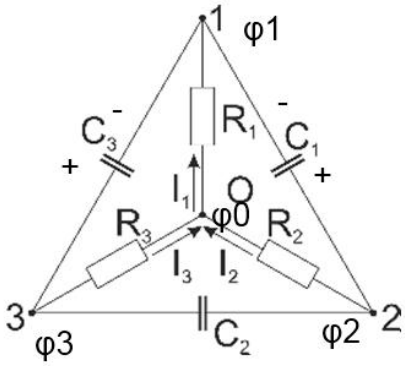
Задача 5. (20 баллов). В схеме, изображенной на рисунке, известны сопротивления, они одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$, известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Найдите заряд на конденсаторе C_1.



Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условиям задачи и обозначим на нём потенциалы точек – узловых соединений схемы. Благодаря тому, что на рисунке указано направление токов, протекающих в цепи, возможно указать какая из пластин конденсатора заряжена положительным зарядом, а какая отрицательным, а также соотношение между потенциалами.

Так: $\varphi_2 > \varphi_0 > \varphi_1$.



Ток I_2 порожден разностью потенциалов $\varphi_2 - \varphi_0$, следовательно, записав закон Ома для участка цепи получим:

$$\varphi_2 - \varphi_0 = I_2 R, \quad (1).$$

Аналогично для тока I_1:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = I_1 R \quad (2).$$

Сложим выражения (1) и (2):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = R(I_1 + I_2).$$

Кроме того заметим, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ обуславливает появление заряда на пластинах конденсатора C_1. В соответствии с формулой для емкости конденсатора:

$$\mathrm{C} = \frac{q}{U}.$$

Подставив вместо U, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окончательно имеем:

$$q_1 = \mathrm{C}_1 R(I_1 + I_2).$$